

08.11.23

Математика

Тема: «Параллельность в пространстве»

Математика

Тема: «Параллельность в пространстве»

Аксиомы стереометрии:

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.
2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Следствия из аксиом стереометрии:

- Сл. 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.
- Сл. 2. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.
- Сл. 3. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

Взаимное расположение прямых и плоскостей в стереометрии

Определение1: две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Если прямые a и b , либо AB и CD параллельны, то пишут:

$$a \parallel b \quad AB \parallel CD$$

- **Теорема 1.** Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.
- **Теорема 2** (признак параллельности прямых). Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.
- **Теорема 3 (обратная теореме 2)** Если одна из двух параллельных прямых параллельна третьей прямой, то вторая тоже параллельна третьей прямой.
- **Теорема 4** Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

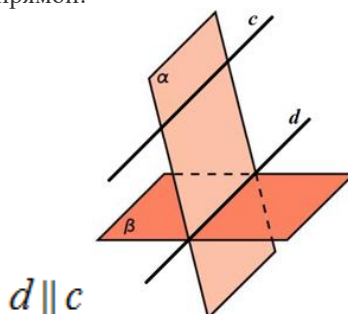
Возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в стереометрии:

- Прямая лежит в плоскости (каждая точка прямой лежит в плоскости).
- Прямая и плоскость пересекаются (имеют единственную общую точку).
- Прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.

Определение2: Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек. Если прямая a параллельна плоскости β , то пишут:

$$a \parallel \beta$$

- **Теорема 5** (признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.
- **Теорема 6** Если плоскость (на рисунке – α) проходит через прямую (на рисунке – c), параллельную другой плоскости (на рисунке – β), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей (на рисунке – d) параллельна данной прямой:

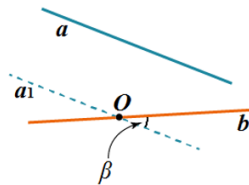


Если две различные прямые лежат в одной плоскости, то они либо пересекаются, либо параллельны. Однако, в пространстве (т.е. в стереометрии) возможен и третий случай, когда не существует плоскости, в которой лежат две прямые (при этом они и не пересекаются, и не параллельны).

Определение 3: Две прямые называются **скрещивающимися**, если не существует плоскости, в которой они обе лежат.

- **Теорема 7** (признак скрещивающихся прямых). Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.
- **Теорема 8** Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.

Определение 4: Пусть a и b – две скрещивающиеся прямые. Возьмем произвольную точку O на одной из них (в нашем случае, на прямой b) и проведем через неё прямую параллельную другой из них (в нашем случае a_1 параллельна a). **Углом между скрещивающимися прямыми a и b** называется угол между построенной прямой и прямой, содержащей точку O (в нашем случае это угол β между прямыми a_1 и b).



Определение 5: Две прямые называются **взаимно перпендикулярными** (перпендикулярными), если угол между ними равен 90° . Перпендикулярными могут быть как скрещивающиеся прямые, так и прямые лежащие и пересекающиеся в одной плоскости. Если прямая a перпендикулярна прямой b , то пишут:

$$a \perp b$$

Определение 6: Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются, т.е. не имеют общих точек. Если две плоскости α и β параллельны, то, как обычно, пишут:

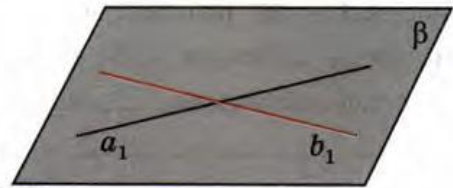
$$\alpha \parallel \beta$$

- **Теорема 9** (признак параллельности плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
- **Теорема 10** (о свойстве противоположных граней параллелепипеда). Противоположные грани параллелепипеда лежат в параллельных плоскостях.
- **Теорема 11** (о прямых пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью). Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые их пересечения параллельны между собой.
- **Теорема 12** Отрезки параллельных прямых, расположенные между параллельными плоскостями, равны.
- **Теорема 13** (о существовании единственной плоскости, параллельной данной плоскости и проходящей через точку вне ее). Через точку, не лежащую в данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

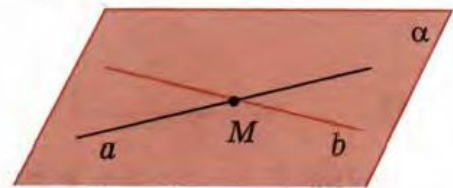
§ 3

Параллельность плоскостей

Теорема (признак параллельности двух плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости _____ двумя прямым другой плоскости, то эти плоскости _____



Дано: прямые a и b , пересекающиеся в точке M , лежат в плоскости α , прямые a_1 и b_1 лежат в плоскости β , $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$.



Доказать: $\alpha \parallel \beta$.

Доказательство. Заметим, что $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$ по признаку _____

_____. Теперь допустим, что плоскости α и β не _____, а пересекаются по _____ c . Тогда плоскость α проходит через прямую a , параллельную плоскости _____, и пересекает плоскость β по прямой c . Следовательно, $a \parallel c$. Но плоскость α проходит и _____, следовательно, $b \parallel c$. Таким образом, через точку M проходят две прямые _____, параллельные прямой _____. Но это невозможно, так как по _____ через точку M _____.

Значит, наше допущение неверно и $\alpha \parallel \beta$.

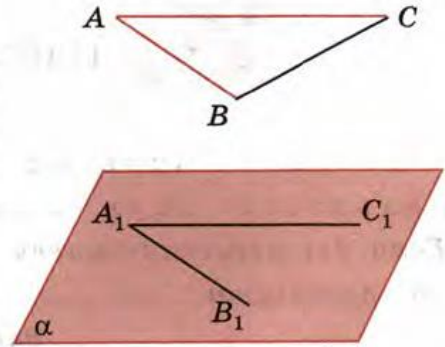
Теорема доказана.

21

Две стороны треугольника параллельны плоскости α . Докажите, что и третья сторона параллельна плоскости α (задача 52 учебника).

Доказательство. Пусть стороны AB и AC треугольника ABC параллельны плоскости α . Докажем, что и третья сторона BC параллельна плоскости α . Так как $AB \parallel \alpha$, то, согласно заданию 10, в плоскости

α существует некоторая прямая $A_1B_1 \parallel AB$. Аналогично существует прямая A_1C_1 плоскости α , параллельная прямой AC . Итак, две пересекающиеся прямые AB и AC плоскости ABC параллельны двум прямым A_1B_1 и A_1C_1 плоскости α , следовательно, _____
_____, эти плоскости _____, а потому прямая BC _____ плоскости α .



22

Точка F не лежит в плоскости треугольника MNP , точки E , K и T лежат на отрезках FM , FN и FP , причем $\frac{FE}{FM} = \frac{FK}{FN} = \frac{FT}{FP} = \frac{2}{3}$.

а) Докажите, что плоскости EKT и MNP параллельны.

б) Найдите площадь треугольника MNP , если площадь треугольника EKT равна 36 см^2 .

Решение.

а) $\triangle EFK \sim$ _____, так как _____

_____, поэтому $EK \parallel$ _____ и $EK =$ _____.

Аналогично $\triangle KFT \sim$ _____, так как _____

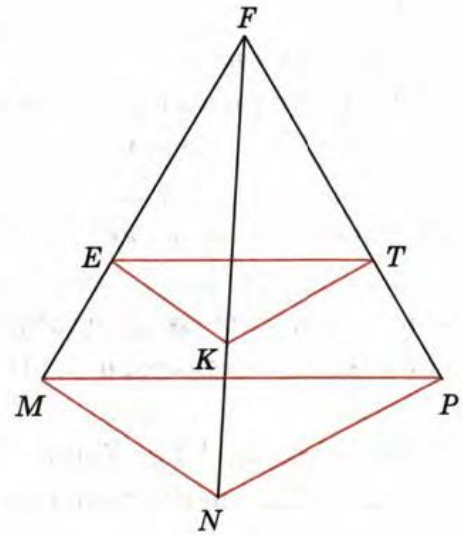
_____, поэтому $KT \parallel$ _____ и $KT =$ _____

Итак, пересекающиеся прямые EK и KT плоскости EKT соответственно _____ плоскости MNP , следовательно, эти плоскости _____

б) $\triangle EKT \sim$ _____, так как _____

_____, и коэффициент подобия k равен _____. Поэтому $S_{EKT} : S_{MNP} = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{9}$, откуда $S_{MNP} = 9 \cdot 36 = 324$.

Ответ. б) _____



На рисунке параллельные плоскости α и β пересечены прямыми MN и MF , P_1, P_2 и Q_1, Q_2 — точки пересечения прямых с плоскостями α и β . Найдите P_1P_2 , если $MP_1 : MQ_1 = 3 : 4$ и $Q_1Q_2 = 72$ см.

Решение.

1) Пересекающиеся прямые MN и MF задают некоторую _____ γ . P_1 и P_2 — общие точки плоскостей α и γ , поэтому прямая P_1P_2 — _____, аналогично Q_1 и Q_2 — _____, поэтому прямая Q_1Q_2 — _____.

Итак, параллельные плоскости α и β пересечены плоскостью γ , поэтому, согласно _____, линии их пересечения _____, т. е. $P_1P_2 \parallel$ _____.

2) $\triangle MP_1P_2 \sim$ _____, так как _____, следовательно, $MP_1 : MQ_1 = P_1P_2 :$ _____, $P_1P_2 =$ _____ = _____.

Ответ. _____

